

[I] 2次方程式 $x^2 + ax + 4b = 0$ の解を α, β とおく。ただし、実数 a, b は $a^2 - 10a + b^2 = 0$ を満たす。このとき、次の間に答えなさい。

(1) α, β が実数でないとき、 $|\alpha|$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり、このとき、 $a = \boxed{\text{ウ}}$ 、 $b = \boxed{\text{エ}}$ である。

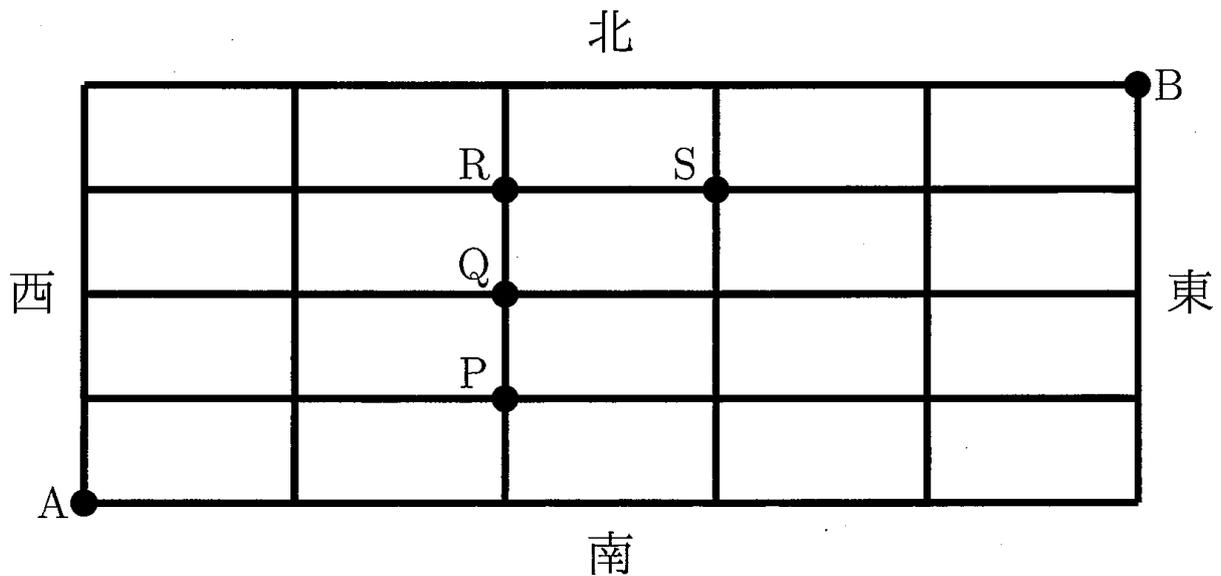
(2) $\alpha = \beta$ で $a \neq 0$ のとき、 $a = \boxed{\text{オ}}$ 、 $b = \boxed{\text{カ}}$ 、 $\alpha = \beta = \boxed{\text{キク}}$ である。

(3) α, β が実数であるとする。このとき、

(3-1) $\alpha^2 + \beta^2 + 10\alpha + 10\beta$ の最大値は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

(3-2) $\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\beta - \alpha - \beta$ の最大値は $\boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ 、最小値は $\boxed{\text{セソ}}$ である。

[II]



上図のように、東西に5本、南北に6本の道がある。A から B まで行く道順を考える。次の問に答えなさい。

- (1) A から B まで最短で行く道順は 通りである。
- (2) Q を通って、A から B まで最短で行く道順は 通りである。
- (3) 区画 QR および区画 RS のどちらも通らずに、A から B まで最短で行く道順は 通りである。
- (4) A から B まで行く途中に、1 回だけ東から西に1 区画戻ることにして行くとする。ただし、この1 回以外は、東か北のいずれかにしか移動しない。また、B には1 度だけ到達するものとする。このとき、
 - (4-1) P, Q, R のいずれかで1 区画西に戻ることにして、A から B まで最短で行く道順は 通りである。
 - (4-2) 途中に1 回だけ東から西に1 区画戻ることにして、A から B まで最短で行く道順は 通りである。

[III] $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ を定義域とする 2 つの関数 $f(x), g(x)$ が、次の (i), (ii) を満たすとする。

$$(i) f(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \tan^2 x + (3 - \sqrt{3}) \tan x - 8g(x),$$

$$(ii) g'(x) = \tan x, g(0) = 0.$$

このとき、次の問に答えなさい。以下、対数は自然対数とする。

(1) $f'(0) = \boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $f(x)$ の極小値を求めると、

$$x = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi \text{ のとき, } \frac{\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}} \log 2,$$

$$x = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi \text{ のとき, } \frac{\boxed{\text{ス}} - \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} - \boxed{\text{タ}} \log 2$$

の 2 つである。

(3) $f(x)$ の極大値を求めると、 $x = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}\pi$ のとき、

$$\frac{\boxed{\text{トナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} + \boxed{\text{ノ}} \log \left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ハ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{4} \right) \text{ である。}$$

ただし、 $\boxed{\text{ハ}} > \boxed{\text{ヒ}}$ とする。

