

[I] $g(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次多項式, $f(x) = g(x)e^x$ とする。座標平面上で曲線 $C: y = f(x)$ が, 次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとき, 以下の問に答えなさい。

(i) $f(x)$ は $x = 3$ のとき, 極小値 0 をとる。

(ii) 点 $(a, 0)$ は曲線 C の変曲点である。ただし, $a \neq 3$ である。

(1) (1-1) $a = \boxed{\text{ア}}$ である。

(1-2) 曲線 C の点 $(a, 0)$ 以外の変曲点の x 座標は $\pm\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(1-3) $g(x) = x^3 - \boxed{\text{ウ}}x^2 + \boxed{\text{エオ}}x - \boxed{\text{カ}}$ である。

(2) (2-1) $f(x)$ は, $x = 3$ のとき以外に, $x = \boxed{\text{キク}}$ のとき極小値をとり, その

極小値は $-\boxed{\text{ケコ}}e^{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(2-2) $f(x)$ の極大値は $e^{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{セ}}e\left(\boxed{\text{ソ}} - e^{\boxed{\text{タ}}}\right)$ である。

[II] 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問に答えなさい。

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = a_n + \frac{n(n+1)}{3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

- (1) 次の等式はすべての整数 n について成立する恒等式であるとする。ただし、 p は整数の定数とする。

$$n(n+p) = \frac{1}{2} \left\{ 3(n+1)(n+1+q) - (n+2)(n+2+q) + r \right\}$$

このとき、定数 q, r を p を用いて表すと $q = p - \boxed{\text{ア}}$ 、 $r = -p + \boxed{\text{イ}}$ となる。

- (2) (2-1) 数列 $\{a_n\}$ の第 5 項 a_5 は、 $a_5 = \frac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(2-2) $\{a_n\}$ の一般項 a_n は、

$$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \left\{ \boxed{\text{ケコ}} - \frac{\boxed{\text{サ}}(n + \boxed{\text{シ}})^{\boxed{\text{ス}}} + 1}{3^{n-\boxed{\text{セ}}}} \right\}$$

である。

- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$(3-1) S_n = \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}} \left\{ \boxed{\text{タチ}}n - \boxed{\text{ツテ}} + \frac{\boxed{\text{ト}}n^2 + \boxed{\text{ナニ}}n + \boxed{\text{ヌネ}}}{3^{n-\boxed{\text{ノ}}}} \right\}$$

である。

- (3-2) $S_n > 2026$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{ハヒフ}}$ である。

[III] 正の整数全体の集合から重複を許して 1 個ずつ順に合計 K 個の数 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_K$ (j 番目にとり出した数を n_j とする ($1 \leq j \leq K$)) を

$$\text{条件 (i)} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_K = 100$$

を満たすようにとり出し、その組 $\{n_1, n_2, n_3, \dots, n_K\}$ や順列 $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_K)$ を考える。例えば、 $K = 2$ のとき、 $n_1 + n_2 = 100$ を満たす 2 個の正の整数 n_1, n_2 を考えると、順序を考慮しなければ、組 $\{n_1, n_2\}$ は $\{1, 99\}, \{2, 98\}, \{3, 97\}, \dots, \{50, 50\}$ の 50 通りである。一方、順序を考慮すると順列 (n_1, n_2) は $(1, 99), (2, 98), (3, 97), \dots, (49, 51), (50, 50), (51, 49), \dots, (99, 1)$ の 99 通りである。

このとき、以下の問に答えなさい。

(1) $K = 4$ とする。 n_1, n_2, n_3, n_4 が、条件 (i) に加え、さらに $|n_i - n_j| \leq 3$

($1 \leq i < j \leq 4$) を満たすようにとり出すとき、

(1-1) このような、組 $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ の総数は ア 通りである。

(1-2) このような、順列 (n_1, n_2, n_3, n_4) の総数は イウ 通りである。

(2) $K = 5$ とする。 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 が、条件 (i) に加え、さらに $|n_i - n_j| \leq 3$

($1 \leq i < j \leq 5$) を満たすようにとり出すとき、

(2-1) このような、組 $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ の総数は エ 通りである。

(2-2) このような、順列 $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ の総数は オカキ 通りである。

(3) $K = 5$ とする。 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 が、条件 (i) に加え、さらに $|n_{i+1} - n_i| \leq 1$

($1 \leq i \leq 4$) を満たすようにとり出すとき、このような、順列 $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$

の総数は クケ 通りである。