

[I] 次の各問の答えを選択肢から選りなさい。

(1) $x > 0, x \neq 1$ とする。

(1-1) $(x^7)^3 \div (x^4)^4 \times x^3 = x^p$ のとき, $p = \boxed{\text{ア}}$ である。

(選択肢) a. 10 b. 8 c. 5 d. 2 e. -1

(1-2) $\sqrt[3]{x^2} \div \sqrt[6]{x^7} \times \sqrt[4]{x^5} = x^q$ のとき, $q = \boxed{\text{イ}}$ である。

(選択肢) a. $-\frac{21}{4}$ b. $-\frac{7}{12}$ c. $-\frac{11}{70}$ d. $\frac{3}{4}$ e. $\frac{101}{70}$

(2) 次の問に答えなさい。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(2-1) $\log_{10} \frac{64}{27}$ の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(選択肢) a. -0.3522 b. 0.1249 c. 0.3747 d. 0.4259 e. 5.3381

(2-2) $10^n < 18^{20} < 10^{n+1}$ を満たす正の整数 n は, $n = \boxed{\text{エ}}$ である。

(選択肢) a. 25 b. 26 c. 27 d. 28 e. 29

(3) 連立方程式 $\begin{cases} \log_5(3x + 4y) = 2 \\ \log_2(4x + 5y) = 5 \end{cases}$ の解が $x = p, y = q$ であるとき, $q = \boxed{\text{オ}}$ である。

(選択肢) a. -15 b. -7 c. 4 d. 10 e. 53

(4) $\cos \theta = -\frac{5}{6}$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) であるとき, $\sin \theta = \boxed{\text{カ}}$ である。

(選択肢) a. $-\frac{\sqrt{11}}{6}$ b. $-\frac{1}{6}$ c. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{\sqrt{11}}{5}$ e. $\frac{\sqrt{11}}{6}$

[II] 座標平面上で、点 $P(a, -a^2 - 2a + 15)$ は曲線 $C : y = -x^2 - 2x + 15$ の第 1 象限に含まれる部分を動くとする。さらに、 $Q(-a, -a^2 + 2a + 15)$, $O(0, 0)$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, 15)$ とする。このとき、以下の問に答えなさい。

(1) (1-1) a のとりうる範囲は $\boxed{\text{ア}} < a < \boxed{\text{イ}}$ である。

(1-2) $PQ = \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}} a$ である。

(2) 4 点 A, B, P, Q を頂点とする台形 $ABPQ$ を考える。

(2-1) 台形 $ABPQ$ の周の長さは、

$$\boxed{\text{オカ}} a^2 + \boxed{\text{キ}} \left(\sqrt{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}} \right) a + \boxed{\text{コサ}}$$

である。また、その最大値は $\sqrt{\boxed{\text{シ}}} + \boxed{\text{スセ}}$ である。

(2-2) 台形 $ABPQ$ の面積は、 $a = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ のとき、最大値 $\boxed{\text{タチ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ をとる。

(3) 点 D を曲線 C と x 軸の正の部分との共有点とする。このとき、四角形

$ODPC$ の面積の最大値は、 $\frac{\boxed{\text{テトナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

[III] $-2, -1, 0, 1, 2$ の 5 個の数字から重複を許して 1 個ずつ順に合計 K 個の数 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_K$ (j 番目にとり出した数を n_j とする ($1 \leq j \leq K$)) を

$$\text{条件 (i)} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_K = 0$$

を満たすようにとり出し、その組 $\{n_1, n_2, n_3, \dots, n_K\}$ や順列 $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_K)$ を考える。例えば、 $K = 2$ のとき、 $n_1 + n_2 = 0$ を満たす 2 個の数 n_1, n_2 を考えると、順序を考慮しなければ、組 $\{n_1, n_2\}$ は $\{0, 0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}$ の 3 通りである。一方、順序を考慮すると順列 (n_1, n_2) は $(0, 0), (-1, 1), (1, -1), (-2, 2), (2, -2)$ の 5 通りである。このとき、以下の問に答えなさい。

(1) $K = 4$ とする。 n_1, n_2, n_3, n_4 が、条件 (i) に加え、さらに $|n_i - n_j| \leq 3$

($1 \leq i < j \leq 4$) を満たすようにとり出すとき、

(1-1) このような、組 $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ の総数は ア 通りである。

(1-2) このような、順列 (n_1, n_2, n_3, n_4) の総数は イウ 通りである。

(2) $K = 5$ とする。 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 が、条件 (i) に加え、さらに $|n_i - n_j| \leq 3$

($1 \leq i < j \leq 5$) を満たすようにとり出すとき、

(2-1) このような、組 $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ の総数は エ 通りである。

(2-2) このような、順列 $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ の総数は オカキ 通りである。

(3) $K = 5$ とする。 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 が、条件 (i) に加え、さらに $|n_{i+1} - n_i| \leq 1$

($1 \leq i \leq 4$) を満たすようにとり出すとき、このような、順列 $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$

の総数は クケ 通りである。